

TEORIA SIMMETRICA DELL'ELETTRONE E DEL POSITRONE

Nota di ETTORE MAJORANA

Sunto. - *Si dimostra la possibilità di pervenire a una piena simmetrizzazione formale della teoria quantistica dell'elettrone e del positrone facendo uso di un nuovo processo di quantizzazione. Il significato delle equazioni di DIRAC ne risulta alquanto modificato e non vi è più luogo a parlare di stati di energia negativa; nè a presumere per ogni altro tipo di particelle, particolarmente neutre, l'esistenza di « antiparticelle » corrispondenti ai « vuoti » di energia negativa.*

L'interpretazione dei cosiddetti « stati di energia negativa » proposta da DIRAC ⁽¹⁾ conduce, come è ben noto, a una descrizione sostanzialmente simmetrica degli elettroni e dei positroni. La sostanziale simmetria del formalismo consiste precisamente in questo, che fin dove è possibile applicare la teoria girando le difficoltà di convergenza, essa fornisce realmente risultati del tutto simmetrici. Tuttavia gli artifici suggeriti per dare alla teoria una forma simmetrica che si accordi con il suo contenuto, non sono del tutto soddisfacenti; sia perchè si parte sempre da una impostazione asimmetrica, sia perchè la simmetrizzazione viene in seguito ottenuta mediante tali procedimenti (come la cancellazione di costanti infinite) che possibilmente dovrebbero evitarsi. Perciò abbiamo tentato una nuova via che conduce più direttamente alla meta.

Per quanto riguarda gli elettroni e i positroni, da essa si può veramente attendere soltanto un progresso formale; ma ci sembra importante, per le possibili estensioni analogiche, che venga a cadere la nozione stessa di stato di energia negativa. Vedremo infatti che è perfettamente possibile costruire, nella maniera più naturale, una teoria delle particelle neutre elementari senza stati negativi.

(1) P. A. M. DIRAC, « Proc. Camb. Phil. Soc. », **30**, 150, 1924. V. anche W. HEISENBERG, « ZS. f. Phys. », **90**, 209, 1934.

1. L'elettrodinamica quantistica si può dedurre, come si sa, mediante un processo di quantizzazione da un sistema di equazioni che comprende, da una parte, le equazioni d'onda dell'elettrone di DIRAC, dall'altra le equazioni di MAXWELL in cui le densità di carica e di corrente sono rappresentate da certe espressioni formate mediante la funzione d'onda elettronica. La forma che si dà a queste espressioni aggiunge in realtà qualcosa di nuovo alle equazioni di Dirac e soltanto da essa può derivare quella asimmetria rispetto al segno della carica che nelle equazioni di Dirac non esiste. Ma poichè tali espressioni risultano automaticamente dall'applicazione di un principio variazionale da cui si deducono insieme le equazioni di Maxwell e quelle di Dirac, il nostro problema sarà dunque di esaminare il fondamento di questo principio e la possibilità di sostituirlo con altro più appropriato.

Le grandezze che figurano nelle equazioni di Maxwell-Dirac sono notoriamente di due specie: da una parte si hanno i potenziali elettromagnetici, suscettibili entro i limiti del principio di corrispondenza di interpretazione classica, dall'altra le onde materiali che rappresentano particelle obbedienti alla statistica di FERMI e che hanno significato solo come grandezze quantistiche. In queste condizioni appare poco soddisfacente che le equazioni e tutto il processo di quantizzazione si facciano dipendere da un principio variazionale che è soltanto suscettibile di interpretazione classica. Sembra più naturale il cercare una generalizzazione dei metodi variazionali tale che le variabili le quali figurano nella funzione Langrangiana abbiano, come è desiderabile, fin dal principio il loro significato finale; e rappresentino quindi delle grandezze non necessariamente commutabili. È questa appunto la via che seguiremo. Essa ha importanza sopra tutto per i campi legati alla statistica di Fermi, mentre per quanto riguarda il campo elettromagnetico ragioni di semplicità possono far presumere che nulla sia da aggiungere ai vecchi metodi. Non affronteremo del resto lo studio sistematico delle possibilità logiche offerte dal nuovo punto di vista in cui ci poniamo, ma ci limiteremo a descrivere un processo di quantizzazione dell'onda materiale che solo sembra avere attualmente importanza applicativa; esso si presenta come una naturale generalizzazione del metodo di JORDAN-WIGNER ⁽¹⁾ e permette non solo di dare una forma simmetrica alla teoria degli elettroni-positroni, ma anche di costruire una teoria sostanzialmente nuova per le particelle senza carica elettrica (neutroni e ipotetici neutrini). Per quanto non sia forse ancora pos-

(¹) P. JORDAN e E. WIGNER, « ZS. f. Phys. », 47, 631, 1928.

sibile chiedere all'esperienza una decisione fra questa nuova teoria e quella consistente nella semplice estensione delle equazioni di Dirac alle particelle neutre, va tenuto presente che la prima introduce, in questo campo ancora poco esplorato, un minor numero di entità ipotetiche.

Lasciando al lettore l'ovvia estensione delle formole seguenti ai sistemi continui di cui dovremo occuparci in seguito, esponiamo per maggiore chiarezza il metodo di quantizzazione con riferimento ai sistemi discreti. Sia dunque un sistema fisico descritto dalle variabili *reali* (matrici simmetriche Hermitiane) q_1, q_2, \dots, q_n . Definiamo una funzione Lagrangiana

$$(1) \quad L = i \sum_{r,s} (A_{rs} \dot{q}_r \dot{q}_s + B_{rs} q_r q_s),$$

e poniamo

$$(2) \quad \delta \int L dt = 0,$$

intendendo che in queste formole A_{rs} e B_{rs} sono numeri reali ordinari, costanti i primi ed eventualmente dipendenti dal tempo i secondi, e che soddisfano alle relazioni

$$(3) \quad A_{rs} = A_{sr}; \quad B_{rs} = -B_{sr},$$

essendo inoltre $\det \|A_{rs}\| \neq 0$.

Se le q fossero grandezze commutabili, il principio variazionale (2) non avrebbe alcun significato essendo identicamente verificato. Per grandezze non commutabili la (2) implica invece l'annullarsi in ogni istante della matrice Hermitiana

$$i \sum_r [\delta q_r (\sum_s A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s) - \sum_s (A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s) \delta q_r] = 0,$$

comunque si scelgano le variazioni δq_r . Questo è possibile solo se le espressioni $\sum_s (A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s)$ sono multiple della matrice unità, in modo che con qualche opportuna aggiunta al principio variazionale (2) (per es. imponendo l'annullarsi della somma dei termini diagonali ⁽¹⁾ in tali espressioni) si possono considerare le seguenti come equazioni del movimento

$$(4) \quad \sum_s (A_{rs} \dot{q}_s + B_{rs} q_s) = 0 \quad r = 1, 2, \dots, n.$$

Vogliamo ora mostrare che queste equazioni possono farsi dipen-

(1) L'applicazione fisica che è esposta più avanti suggerisce la restrizione più rigorosa che in qualunque combinazione lineare delle q_r e \dot{q}_r con ogni autovalore debba presentarsene un altro uguale e opposto.

dere nel modo consueto

$$\dot{q}_r = -\frac{2\pi i}{h} (q_r H - H q_r)$$

dall'Hamiltoniana

$$(5) \quad H = -i \sum_{r,s} B_{rs} q_r q_s,$$

la cui forma esatta sarà meglio giustificata in seguito, purchè si stabiliscano fra le q_r opportune relazioni di *anticommutabilità*. Sostituendo nelle (4) mediante le equazioni successive si trova infatti

$$\begin{aligned} \sum_s B_{rs} q_s &= \frac{2\pi}{h} \sum_{s,l,m} A_{rs} B_{lm} (q_s q_l q_m - q_l q_m q_s) = \\ &= \frac{2\pi}{h} \sum_{s,l,m} A_{rs} B_{lm} [(q_s q_l + q_l q_s) q_m - q_l (q_s q_m + q_m q_s)] = \\ &= \frac{2\pi}{h} \sum_{lm} B_{lm} \{ q_m [\sum_s A_{rs} (q_s q_l + q_l q_s)] + [\sum_s A_{rs} (q_s q_l + q_l q_s)] q_m \}, \end{aligned}$$

e basta porre

$$(6) \quad \sum_s A_{rs} (q_s q_l + q_l q_s) = \frac{h}{4\pi} \delta_{rl},$$

perchè le (4) siano soddisfatte. Indicando con $\|A_{rs}^{-1}\|$ la matrice inversa di $\|A_{rs}\|$ la (6) può scriversi

$$(6') \quad q_r q_s + q_s q_r = \frac{h}{4\pi} A_{rs}^{-1}.$$

Nel caso speciale che A sia ridotta a forma diagonale

$$A_{rs} = a_r \delta_{rs},$$

si avrà dunque

$$(7) \quad q_r q_s + q_s q_r = \frac{h}{4 \cdot a_r} \delta_{rs}.$$

Passiamo ora ad applicare questo schema alle equazioni di Dirac.

2. Dalle equazioni di Dirac senza campo esterno

$$(8) \quad \left[\frac{W}{c} + (\alpha, p) + \beta mc \right] \psi = 0,$$

può notoriamente essere eliminata l'unità immaginaria (e in modo relativisticamente invariante) con un'opportuna scelta degli operatori α e β . Noi ci riferiremo appunto ad un sistema di coordinate intrinseche tale che renda le (8) reali, avvertendo espressamente che le formole a cui perverremo non sono valide, senza opportune modificazioni, in coordinate generali. Indicando come di consueto,

con $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ e ρ_1, ρ_2, ρ_3 due terne indipendenti di matrici di Pauli, porremo:

$$(9) \quad \alpha_x = \rho_1 \sigma_x; \quad \alpha_y = \rho_2; \quad \alpha_z = \rho_1 \sigma_z; \quad \beta = -\rho_1 \sigma_y;$$

con che dividendo le (9) per $-\frac{h}{2\pi i}$ e ponendovi $\beta' = -i\beta$, $\mu = \frac{2\pi mc}{h}$ si hanno le equazioni reali

$$(8') \quad \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] \psi = 0.$$

In conseguenza le (8) si scindono in due gruppi distinti, di cui l'uno agisce sulla parte reale, l'altro sulla parte immaginaria di ψ . Poniamo $\psi = U + iV$ e consideriamo le equazioni reali (8') in quanto agiscono sulle U :

$$(10) \quad \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] U = 0.$$

Queste equazioni *da sole* ⁽¹⁾, cioè senza considerare le equazioni identiche che legano le V , possono essere ricondotte al principio variazionale esposto anteriormente ed assoggettate al processo di quantizzazione già descritto, mentre nulla di simile potrebbe farsi con i metodi elementari.

Come principio variazionale da cui dedurre le (10) assumiamo il seguente:

$$(11) \quad \delta \int i \frac{hc}{2\pi} U^* \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] U dq dt = 0.$$

È facile riconoscere che le condizioni (3) nella loro naturale estensione ai sistemi continui sono verificate. Seguono in base alle (7) le relazioni di anticommutabilità

$$(12) \quad U_i(q)U_k(q') + U_k(q')U_i(q) = \frac{1}{2} \delta_{ik} \delta(q - q'),$$

mentre l'energia diviene, per la (5):

$$(13) \quad H = \int U^* [-c(\alpha, p) - \beta mc^2] U dq.$$

L'invarianza relativistica di (12) e (13) non richiede particolare dimostrazione, poichè completando tali equazioni con quelle analoghe che si riferiscono alle V , nonchè con le relazioni di anticommutabilità fra le U e le V : $U_r(q)V_s(q') + V_s(q')U_r(q) = 0$, si riottiene nul-

(1) Il comportamento delle U per riflessione in un punto dello spazio si può definire convenientemente tenendo presente che, già per altre ragioni, un cambiamento simultaneo di segno delle U_r non ha significato fisico. Nel nostro schema: $U'(q) = EU(-q)$ con $E = i\rho_1 \sigma_y$ e quindi $E^2 = -1$. Similmente se si inverte l'asse del tempo: $U'(q, t) = i\rho_2 U(q, -t)$.

l'altro che l'ordinario schema di Jordan-Wigner applicato alle equazioni di Dirac senza campo. Ma è notevole che la parte di tale formalismo che si riferisce alle U (o alle V) possa *da sola* essere considerata come descrizione teorica, in armonia con i metodi generali della meccanica quantistica, di un qualche sistema materiale. Il fatto che tale formalismo ridotto non si adatti alla descrizione degli elettroni positivi e negativi, può bene essere dovuto alla presenza della carica elettrica e non impedisce l'affermazione che allo stato attuale delle nostre conoscenze le (12) e (13) costituiscono la più semplice rappresentazione teorica di un sistema di particelle neutre. Il vantaggio di questo procedimento rispetto all'interpretazione elementare delle equazioni di Dirac è (come vedremo meglio fra poco) che non vi è più nessuna ragione di presumere l'esistenza di antineutroni o antineutrini. Questi ultimi vengono in realtà utilizzati nella teoria dell'emissione β positiva⁽¹⁾, ma tale teoria può essere, ovviamente, modificata in modo che l'emissione β , sia negativa che positiva, venga sempre accompagnata dall'emissione di un neutrino.

In ragione dell'interesse che l'ipotesi suddetta conferisce alle equazioni (12) e (13), crediamo utile esaminarne da vicino il significato. Sviluppiamo perciò le U nell'interno di un cubo di lato L secondo il sistema di funzioni periodiche

$$(14) \quad f_{\gamma}(q) = \frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma, q)},$$

$$\gamma = (\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z); \quad \gamma_x = \frac{n_1}{L}, \quad \gamma_y = \frac{n_2}{L}, \quad \gamma_z = \frac{n_3}{L};$$

$$n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ponendo

$$(15) \quad U_r(q) = \sum_{\gamma} a_r(\gamma) f_{\gamma}(q).$$

In conseguenza, della realtà delle U , sarà

$$(16) \quad a_r(\gamma) = \bar{a}_r(-\gamma).$$

Ponendoci nel caso generale $\gamma \neq 0$, segue dalle (12)

$$(17) \quad \begin{cases} a_r(\gamma) \bar{a}_s(\gamma) + \bar{a}_s(\gamma) a_r(\gamma) = \frac{1}{2} \delta_{rs}, \\ a_r(\gamma) a_s(\gamma) + a_s(\gamma) a_r(\gamma) = 0, \\ \bar{a}_r(\gamma) \bar{a}_s(\gamma) + \bar{a}_s(\gamma) \bar{a}_r(\gamma) = 0. \end{cases}$$

Tutte queste grandezze sono inoltre anticommutabili con le $a(\gamma')$ e $\bar{a}(\gamma')$ per γ' diverso sia da γ che da $-\gamma$.

(1) Cfr. G. WICK, « Rend. Accad. Lincei », 21, 170, 1935.

L'energia risulta per la (13):

$$(18) \quad H = \sum_r \sum_{s=1}^4 \left[-\hbar c(\gamma, \alpha^{rs}) - mc^2 \beta^{rs} \right] \bar{a}_r(\gamma) a_s(\gamma).$$

La quantità di moto secondo x corrisponde, come sempre, a meno del fattore $\frac{\hbar}{2\pi} i$ allo spostamento unitario in tale direzione

$$(19) \quad M_x = \int U^* p_x U dq = \sum_r \sum_{s=1}^4 \hbar \gamma_{\alpha} \bar{a}_r(\gamma) a_s(\gamma),$$

e analogamente per M_y e M_z .

Per ogni valore di γ figura in (18) una forma Hermitiana che ha notoriamente due autovalori positivi e due negativi, tutti uguali in valore assoluto a $c\sqrt{m^2c^2 + \hbar^2\gamma^2}$.

Possiamo quindi porre in luogo di (18)

$$(18') \quad H = \sum_r c\sqrt{m^2c^2 + \hbar^2\gamma^2} [\bar{b}_1(\gamma)b_1(\gamma) + \bar{b}_2(\gamma)b_2(\gamma) - \bar{b}_3(\gamma)b_3(\gamma) - \bar{b}_4(\gamma)b_4(\gamma)]$$

essendo le b_r opportune combinazioni lineari delle a_r ottenute per trasformazione unitaria. Risulta inoltre dalla (16) che le $b_r(\gamma)$ sono esprimibili linearmente mediante le $\bar{b}_r(-\gamma)$.

Dal fatto poi che la forma Hermitiana che figura in (18) per un dato valore di γ resta invariata in virtù di (16) e (17) quando si cambia γ in $-\gamma$ segue tenendo ancora conto di (17) che si può porre:

$$(20) \quad b_3(\gamma) = \bar{b}_1(-\gamma); \quad b_4(\gamma) = \bar{b}_2(-\gamma).$$

Introducendo per semplicità le nuove variabili

$$(21) \quad B_1(\gamma) = \sqrt{2}b_1(\gamma); \quad B_2(\gamma) = \sqrt{2}b_2(\gamma),$$

otteniamo così

$$(22) \quad H = \sum_r c\sqrt{m^2c^2 + \hbar^2\gamma^2} \sum_{r=1}^2 \left[n_r(\gamma) - \frac{1}{2} \right],$$

$$(23) \quad M_x = \sum_r \hbar \gamma_{\alpha} \sum_{r=1}^2 \left[n_r(\gamma) - \frac{1}{2} \right],$$

essendosi posto

$$n_r(\gamma) = \bar{B}_r(\gamma)B_r(\gamma) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

ed essendosi inoltre

$$(24) \quad \begin{cases} B_r(\gamma)\bar{B}_s(\gamma') + \bar{B}_s(\gamma')B_r(\gamma) = \delta_{rr'}\delta_{rs}, \\ B_r(\gamma)B_s(\gamma') + B_s(\gamma')B_r(\gamma) = 0, \\ \bar{B}_r(\gamma)\bar{B}_s(\gamma') + \bar{B}_s(\gamma')\bar{B}_r(\gamma) = 0, \end{cases}$$

come si otterrebbe formalmente per i coefficienti dello sviluppo di un'onda materiale a due componenti secondo lo schema di: Jordan-Wigner.

Queste formole sono completamente analoghe, salvo la diversa statistica, a quelle che si ottengono dalla quantizzazione delle equazioni di Maxwell. In luogo di quanti immateriali si hanno particelle con una massa di riposo finita e anche esse con due possibilità di polarizzazione. Anche qui come nel caso della radiazione, sono presenti i mezzi quanti di riposo dell'energia e della quantità di moto, salvo che il loro segno è opposto in apparente relazione con la diversa statistica. Essi non costituiscono pertanto una difficoltà specifica e allo stato attuale della teoria debbono anche qui essere considerati come semplici costanti additive prive di significato.

La descrizione mediante autofunzioni di queste particelle, così come dei quanti di luce, non riesce in modo conveniente, ma nel nostro caso l'esistenza di una massa di riposo permette di considerare l'approssimazione non relativistica, nella quale sono naturalmente valide tutte le nozioni della meccanica quantistica elementare. Questa approssimazione può avere interesse pratico sopra tutto nel caso di particelle pesanti (neutroni).

Il mezzo più semplice per passare allo spazio delle configurazioni consiste nell'associare a un generico oscillatore l'onda piana

$$\frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma, q)} \delta_{\sigma\sigma_r}, \quad (r=1, 2),$$

corrispondente allo stesso valore della quantità di moto e con due possibilità di polarizzazione per tenere conto della molteplicità degli oscillatori. Possiamo andare oltre e rappresentare con l'autofunzione complessa a due valori $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ non più una sola particella ma un sistema che ne contenga in numero indeterminato secondo il metodo di Jordan-Wigner. Basterà allora porre

$$(25) \quad \begin{cases} \Phi_1(q) = \sum_r \frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma, q)} B_1(\gamma), \\ \Phi_2(q) = \sum_r \frac{1}{L^{3/2}} e^{2\pi i(\gamma, q)} B_2(\gamma). \end{cases}$$

Nell'approssimazione non relativistica $(|\gamma| \ll \frac{mc}{h})$ le costanti $b_r(\gamma)$ che figurano in (18') sono combinazioni lineari della $a_r(\gamma)$ con coefficienti indipendenti da γ .

Tali coefficienti dipendono solo dagli elementi di β e in virtù

di (9) si può porre

$$b_1(\gamma) = \frac{a_3(\gamma) - ia_2(\gamma)}{\sqrt{2}}; \quad b_3(\gamma) = \frac{a_3(\gamma) + ia_2(\gamma)}{\sqrt{2}},$$

$$b_2(\gamma) = \frac{a_4(\gamma) + ia_1(\gamma)}{\sqrt{2}}; \quad b_4(\gamma) = \frac{a_4(\gamma) - ia_1(\gamma)}{\sqrt{2}},$$

con che anche le (20), a causa di (16), sono soddisfatte. Dalle (15) e (25) segue dunque per l'approssimazione non relativistica:

$$(26) \quad \begin{cases} \Phi_1(q) = U_3(q) - iU_2(q), \\ \Phi_2(q) = U_4(q) + iU_1(q). \end{cases}$$

Notiamo la circostanza, di interesse puramente formale, che $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$ coincide a meno del fattore $\sqrt{2}$ con la coppia di componenti *grandi* delle autofunzioni appartenenti alle equazioni (10), interpretate nel modo consueto, senza cioè restrizioni di realtà. Per dimostrarlo basta verificare che la trasformazione $\psi = \frac{1 - \rho_2 \sigma_y}{\sqrt{2}} U$ permette di passare dallo schema (9) a quello usuale di Dirac ($\alpha = \rho_1 \sigma; \beta = \rho_3$) e che risulta effettivamente

$$\psi_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_1, \quad \psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_2;$$

in tale schema sono infatti notoriamente ψ_3 e ψ_4 le componenti grandi. Questo avvicinamento, se chiarisce la legge di trasformazione di Φ di fronte alle rotazioni nello spazio, cessa naturalmente di avere significato in rapporto alle trasformazioni generali di Lorentz.

L'esistenza di formole semplici come le (26), potrebbe fare ritenere superfluo, almeno fino a una certa approssimazione, il passaggio attraverso le onde piane. In realtà tale passaggio è sempre concettualmente necessario per ottenere la cancellazione dei *mezzi quanti di riposo*. Dopo tale cancellazione l'espressione dell'energia è infatti naturalmente in prima approssimazione.

$$(27) \quad H = \int \tilde{\Phi} \left(mc^2 + \frac{1}{2m} p^2 \right) \Phi dq,$$

e differisce quindi in modo essenziale dalla (13).

3. Come abbiamo già detto, lo schema (12) non è sufficiente per la descrizione di particelle cariche; ma l'aggiunta di una seconda quaterna di grandezze reali V_r , analoghe alle U_r , permette di riottenere l'ordinaria elettrodinamica in una forma simmetrica rispetto all'elettrone e al positrone. Consideriamo dunque due serie di gran-

dezze reali rappresentanti rispettivamente le particelle materiali e il campo elettromagnetico. Le grandezze della prima specie vanno interpretate secondo lo schema esposto al n. 1, mentre quelle della seconda serie, e cioè i potenziali elettromagnetici φ e $A = (A_x, A_y, A_z)$ possono intendersi come grandezze classiche quantizzate secondo la regola di Heisenberg fondata sul principio di corrispondenza. L'insieme delle equazioni di Maxwell e Dirac si potrà ottenere (con l'accennata restrizione per quanto riguarda le seconde) da un principio variazionale

$$\delta \int L dq dt,$$

risultando L dalla somma di tre termini

$$L = L' + L'' + L'''$$

di cui il primo è relativo all'onda materiale

$$(28) \quad L' = i \frac{\hbar c}{2\pi} \left\{ U^* \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] U + \right. \\ \left. + V^* \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} - (\alpha, \text{grad}) + \beta' \mu \right] V \right\},$$

e il secondo si riferisce al campo di radiazione che supponiamo quantizzato secondo il metodo di FERMI ⁽¹⁾

$$(29) \quad L'' = \frac{1}{8\pi} (E^2 - H^2) - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{1}{c} \dot{\varphi} + \text{div } A \right)^2.$$

Bisogna quindi imporre la condizione aggiunta.

$$(30) \quad \frac{1}{c} \dot{\varphi} + \text{div } A = 0.$$

L'espressione (29) differisce in realtà da quella usata originariamente da FERMI, ma solo per termini integrabili. Essa conduce a una definizione del momento P_0 coniugato a φ tale da permettere l'immediata eliminazione di una delle due onde longitudinali senza passare per lo sviluppo secondo le onde piane; è a questo riguardo del tutto indifferente che il secondo termine nell'espressione (29) di L'' venga moltiplicato per una costante arbitraria diversa da zero.

Quanto al termine L''' , esso va scelto in modo che $\psi = U + iV$ obbedisca alle equazioni di DIRAC (8) completate con l'introduzione del campo esterno, cioè alle equazioni:

$$\left[\frac{W}{c} + \frac{e}{c} \varphi + \left(\alpha, p + \frac{e}{c} A \right) + \beta mc \right] \psi = 0.$$

(1) E. FERMI, « Rend. Accad. Lincei », 9, 881, 1929.

Questo praticamente obbliga a porre

$$(31) \quad L''' = ieU^*[\varphi + (\alpha, A)]V - ieV^*[\varphi + (\alpha, A)]U.$$

Dalla variazione dei potenziali elettromagnetici si deducono allora le seguenti espressioni per le densità di carica e di corrente

$$(32) \quad \begin{cases} \rho = -ie(U^*V - V^*U) = -e \frac{\bar{\psi}\psi - \psi^*\bar{\psi}}{2}, \\ I = ie(U^*\alpha V - V^*\alpha U) = e \frac{\bar{\psi}\alpha\psi - \psi^*\alpha\bar{\psi}}{2}. \end{cases}$$

Queste espressioni differiscono da quelle consuete solo per *costanti infinite*. La cancellazione di tali costanti infinite è richiesta dalla simmetrizzazione della teoria che è già implicita nella forma scelta per il principio variazionale; infatti lo scambio di U_r e V_r , che entrano simmetricamente in L' , equivale appunto a un cambiamento di segno della carica elettrica.

Le U e V obbediscono alle relazioni di anticommutabilità

$$\begin{aligned} U_r(q)U_s(q') + U_s(q')U_r(q) &= \frac{1}{2}\delta(q - q')\delta_{rs}, \\ V_r(q)V_s(q') + V_s(q')V_r(q) &= \frac{1}{2}\delta(q - q')\delta_{rs}, \\ U_r(q)V_s(q') + V_s(q')U_r(q) &= 0, \end{aligned}$$

equivalenti all'ordinario schema di Jordan-Wigner quando si faccia $\psi = U + iV$. I potenziali elettromagnetici φ, A_x, A_y, A_z e i loro momenti coniugati soddisfanno invece alle ordinarie relazioni di commutabilità, ad es. $P_0(q)\varphi(q') - \varphi(q')P_0(q) = \frac{\hbar}{2\pi i}\delta(q - q')$ essendo ora

$$(33) \quad \begin{cases} P_0 = -\frac{1}{4\pi c} \left(\frac{1}{c} \dot{\varphi} + \text{div } A \right), \\ P_x = -\frac{1}{4\pi c} E_x; \quad P_y = -\frac{1}{4\pi c} E_y; \quad P_z = -\frac{1}{4\pi c} E_z. \end{cases}$$

L'energia consta di tre parti: $H = H' + H'' + H'''$. Il primo termine H' si deduce da L' secondo le regole già esposte. Il secondo si ottiene secondo le regole classiche $H'' = \int [P_0 \dot{\varphi} + (P, A) - L''] dq$, essendosi posto $P = (P_x, P_y, P_z)$. Quanto al termine H''' , esso si può dedurre da L''' seguendo indifferentemente l'uno o l'altro metodo (nel nostro caso $H''' = -\int L''' dq$) e così deve essere dato che L''' è funzione tanto delle grandezze di campo materiali che di quelle

elettromagnetiche. Questo prova d'altronde la necessità della posizione (5). L'equazione di continuità (30) è valida sempre purchè sia soddisfatta inizialmente insieme con l'equazione della divergenza $\text{div } E = 4\pi\rho$. Segue, per le (33), che la cinematica definita dalle relazioni di scambio deve essere ridotta mediante le equazioni

$$(34) \quad \begin{cases} P_0(q) = 0, \\ \text{div } P + \frac{1}{c}\rho = 0, \end{cases}$$

e quindi mediante la fissazione di due grandezze di campo e conseguente indeterminazione delle coniugate. La prima delle (34) importa dunque l'eliminazione di P_0 e di φ dall'espressione di H . Tale eliminazione si ottiene facilmente facendo uso delle (33) e si giunge così alla formola

$$(35) \quad H = \int \left\{ \tilde{\psi} \left[-c(\alpha, p) - \beta mc^2 \right] \psi - (A, I) + 2\pi c P^2 + \frac{1}{8\pi} |\text{rot } A|^2 \right\} dq.$$

Circa la questione dell'invarianza relativistica, osserviamo che le $\psi = U + iV$ soddisfano alle equazioni di Dirac, mentre le equazioni di Maxwell continuano anche esse a valere con espressioni delle densità di carica e di corrente che obbediscono alla legge di trasformazione relativistica. Queste due circostanze assicurano che la dimostrazione completa dell'invarianza della teoria è già implicita nei risultati di HEISENBERG e PAULI (1). Passiamo ora all'interpretazione del formalismo.

4. Sviluppando la U , e analogamente le V , secondo il sistema di funzioni periodiche già considerato, troviamo come ovvia estensione della (22), dopo la cancellazione dei mezzi quanti di riposo

$$(36) \quad H' = \sum_r c \sqrt{m^2 c^2 + \hbar^2 \gamma^2} \sum_{r=1}^2 \left[\bar{B}_r(\gamma) B_r(\gamma) + \bar{B}_r'(\gamma) B_r'(\gamma) \right],$$

riferendosi le B_r e B_r' rispettivamente allo sviluppo delle U e V ; le B_r e B_r' e le loro coniugate obbediscono alle consuete relazioni di anticommutabilità. Introducendo, per ogni valore di γ , quattro opportune funzioni di spin $\xi_s(\gamma)$ ($s = 1, 2, 3, 4$) a quattro valori complessi e formanti un sistema unitario, si potrà porre

$$(37) \quad \begin{cases} U = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_r \left\{ B_1(\gamma) \xi_1(\gamma) + B_2(\gamma) \xi_2(\gamma) + \bar{B}_1(-\gamma) \xi_3(\gamma) + \bar{B}_2(-\gamma) \xi_4(\gamma) \right\} f_r(q), \\ V = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_r \left\{ B_1'(\gamma) \xi_1(\gamma) + B_2'(\gamma) \xi_2(\gamma) + \bar{B}_1'(-\gamma) \xi_3(\gamma) + \bar{B}_2'(-\gamma) \xi_4(\gamma) \right\} f_r(q), \end{cases}$$

(1) W. HEISENBERG e W. PAULI, « ZS. f. Phys. », 56, 1, 1929; 59, 168, 1930.

essendo inoltre soddisfatte le relazioni

$$(38) \quad \begin{cases} \xi_3(\gamma) = \bar{\xi}_1(-\gamma), \\ \xi_4(\gamma) = \bar{\xi}_2(-\gamma). \end{cases}$$

Dall'espressione (32) della densità di elettricità segue per la carica totale

$$(39) \quad \begin{aligned} Q &= -\frac{ie}{2} \int [U^*(q)V(q) - V^*(q)U(q)] dq = \\ &= -\frac{ie}{2} \sum_r \sum_{\gamma=1}^2 [B_r(\gamma)\bar{B}_r'(\gamma) + \bar{B}_r(\gamma)B_r'(\gamma) - \bar{B}_r'(\gamma)B_r(\gamma) - B_r'(\gamma)\bar{B}_r(\gamma)]. \end{aligned}$$

Se si pone

$$(40) \quad C_{r,el} = \frac{B_r + iB_r'}{\sqrt{2}}; \quad C_{r,pos} = \frac{B_r - iB_r'}{\sqrt{2}}$$

le espressioni (36) e (39) dell'energia e della carica si possono portare nella forma

$$(41) \quad H' = \sum_r c \sqrt{m^2 c^2 + \hbar^2 \gamma^2} \sum_{\gamma=1}^2 (\bar{C}_{r,el} C_{r,el} + \bar{C}_{r,pos} C_{r,pos})$$

$$(42) \quad \begin{aligned} Q &= e \sum_r \sum_{\gamma=1}^2 \left[-\left(\bar{C}_{r,el} C_{r,el} - \frac{1}{2} \right) + \bar{C}_{r,pos} C_{r,pos} - \frac{1}{2} \right] = \\ &= e \sum_r \sum_{\gamma=1}^2 \left(-\bar{C}_{r,el} C_{r,el} + \bar{C}_{r,pos} C_{r,pos} \right). \end{aligned}$$

L'eliminazione dei *mezzi quanti di riposo di elettricità* avviene dunque automaticamente purchè, bene inteso, si esegua prima la sommatoria interna. L'insieme di (41) e (42) rappresenta oscillatori equivalenti a un doppio sistema di particelle obbedienti alla statistica di FERMI con la massa di riposo m e la carica $\pm e$; le variabili $C_{r,pos}$ si riferiscono ai positroni e le $C_{r,el}$ agli elettroni.

L'eliminazione del campo elettrico longitudinale mediante la seconda delle (34) presenta difficoltà in una teoria simmetrica per l'impossibilità di porre ρ , quale risulta da (32), in forma diagonale. Il risultato dell'eliminazione è ben noto (per quanto parzialmente illusorio per difficoltà di convergenza) nell'elettrodinamica ordinaria in cui si pone $\rho = -e\bar{\psi}\psi$; ma esso è egualmente noto se si parte da $\rho = e\psi^*\bar{\psi}$ poichè quest'ultima posizione equivale interamente a invertire l'ufficio dell'elettrone e del positrone, considerando quest'ultimo come particella reale e l'elettrone come « vuoto » di positrone. Sembra plausibile che quegli elementi di matrice che risultassero della stessa forma in tali teorie opposte, si debbono conservare nella teoria simmetrica. Supponiamo dunque di aver proceduto alla eliminazione della parte irrotazionale di A e P .

L'espressione (35) di H verrà modificata in due modi: in primo luogo intendendo che A e P in questa espressione rappresentino solo la parte priva di divergenza di tali vettori; e in secondo luogo aggiungendo un termine che rappresenta l'energia elettrostatica. Questo termine ha una forma differente nella teoria ordinaria (elettrone vuoto di elettrone) e in quella opposta. Nella prima si ha conservando l'interazione di ogni particella con se stessa

$$H_{\text{els}} = \frac{e^2}{2} \iint \frac{1}{|q - q'|} \bar{\Psi}(q) \psi(q) \bar{\Psi}(q') \psi(q') dq dq',$$

e nella seconda

$$H_{\text{els}} = \frac{e^2}{2} \iint \frac{1}{|q - q'|} \psi^*(q) \bar{\Psi}(q) \psi^*(q') \bar{\Psi}(q') dq dq'.$$

Mediante le (37) e (40) si può esprimere l'energia elettrostatica in funzione delle C . I soli termini elettrostatici che hanno ricevuto applicazione fisica sono peraltro identici nelle due teorie; essi sono quelli che dal punto di vista corpuscolare si lasciano interpretare come repulsione o attrazione fra particelle distinte della stessa specie o di specie differente.

Per quanto infine concerne l'interazione con il campo di radiazione, l'unica differenza fra la teoria simmetrica e quella ordinaria riguarda la cancellazione di costanti di risultante indeterminata, relative ai singoli oscillatori, nell'espressione della densità di corrente; anche qui rimangono invariate le formole di interesse applicativo.